OPERACIONES CON MATRICES FICHA 2

1) Escribe las matrices cuadradas de orden 4 que corresponden a las definiciones.

$a_{ij} = \begin{cases} 2 & si \quad i \neq j \\ i+2j & si \ i=j \end{cases}$; $b_{ij} = \begin{cases} i^j & si \quad i \leq j \\ j^i & si \ i > j \end{cases}$; $c_{ij} = \begin{cases} i & si \quad i \leq j \\ j & si \ i > j \end{cases}$; $d_{ij} = (-1)^{i+j}$

2) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ Calcula A^2, A^3, A^6 y A^{12}

3) Resuelve la ecuación matricial:

$$2X - 3(A - B) = \frac{1}{2}(X - A) \quad \text{siendo } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

4) Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, resuelve el sistema $\begin{cases} 2X - 3Y = A \\ X - Y = B \end{cases}$

5)Halla una matriz A que cumpla: $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot A$

SOLUCIONES

1) $a_{ij} = \begin{cases} 2 \quad si \quad i \neq j \\ i + 2j \; si \; i = j \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 9 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 12 \end{pmatrix}$

$b_{ij} = \begin{cases} i^j \quad si \quad i \leq j \\ j^i \quad si \; i > j \end{cases} \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 81 \\ 1 & 16 & 81 & 256 \end{pmatrix}$

$c_{ij} = \begin{cases} i \quad si \quad i \leq j \\ j \quad si \; i > j \end{cases} \rightarrow C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; $\quad d_{ij} = (-1)^{i+j} \rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

2) A= $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$

$A^6 = A^3 \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -64 & 0 \\ 0 & -64 \end{pmatrix}$

$A^{12} = A^6 \cdot A^6 = \begin{pmatrix} -64 & 0 \\ 0 & -64 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -64 & 0 \\ 0 & -64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4096 & 0 \\ 0 & 4096 \end{pmatrix}$

3) 2X - 3(A - B) = $\frac{1}{2}(X - A)$ siendo $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$2X - 3A + 3B = \frac{X - A}{2} \rightarrow 4X - 6A + 6B = X - A \rightarrow 3X = 5A - 6B \rightarrow \quad X = \frac{1}{3}(5A - 6B)$$

$$X = \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} -5 & 0 & 10 \\ -25 & 15 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & -6 & 12 \\ 12 & -6 & 12 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ -37 & 21 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 2 & \frac{-2}{3} \\ \frac{-37}{3} & 7 & -4 \end{pmatrix}$$

4) $\left.\begin{array}{l} 2X - 3Y = A \\ X - Y = B \end{array}\right\} \rightarrow X = B + Y \rightarrow 2(B + Y) - 3Y = A \rightarrow 2B - Y = A \rightarrow Y = 2B - A$

$$Y = 2B - A = 2\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$X = B + Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$$

5) Tenemos que encontrar una matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que cumpla:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3+a & 1+b \\ 1+c & 2+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+c & 3b+d \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3+a=3a+c \\ 1+b=3b+d \\ 1+c=a+2c \\ 2+d=b+2d \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2a+c=3 \\ 2b+d=1 \\ c+a=1 \\ b+d=2 \end{array}\right\} \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 2a+c=3 \\ a+c=1 \end{array}\right\} \rightarrow a=2; \quad c=-1 \\ \left.\begin{array}{l} 2b+d=1 \\ b+d=2 \end{array}\right\} \rightarrow b=-1; \quad d=3 \end{array}\right.$$

la matriz pedida es, por tanto, la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$